DOI:10.13718/j.cnki.xdzk.2013.04.003

第35卷第4期　　西南大学学报(自然科学版)　　2013年4月
Vol. 35　No. 4　　Journal of Southwest University (Natural Science Edition)　　Apr.　2013

文章编号：1673-9868(2013)04-0067-04

Smarandache 函数及其相关函数的性质①

郇　乐

西北大学 数学系，西安 710127

摘要：应用初等方法研究 Smarandache 函数及其相关函数 $SL(n)$，$\overline{SL}(n)$，$Sdf(n)$ 和 $Zw(n)$ 的算术乘积的计算问题，并在一些特殊情况下给出它们的精确的计算公式.

关　键　词：Smarandache 函数；Smarandache LCM 函数；SL 对偶函数；双阶乘函数；伪 Smarandache 无平方因子函数；算术乘积

中图分类号：O156.2　　文献标志码：A

美籍罗马尼亚数论专家 F. Smarandache 在他所著的《Only Problems, Not Solutions》(见文献[1])一书中引入了不少新的算术函数及数列，同时提出了 105 个未解决的问题. 本文主要利用初等方法研究了其中几个典型函数(Smarandache 函数 $S(n)$、Smarandache LCM 函数 $SL(n)$、SL 对偶函数 $\overline{SL}(n)$、Smarandache 双阶乘函数 $Sdf(n)$、伪 Smarandache 无平方因子函数 $Zw(n)$)的算术性质. 关于这几类函数的定义参阅文献[1].

对于这些函数以及任意正整数 n，我们考虑乘积形式，获得了几个有趣的恒等式. 具体地说也就是证明了下面的几个定理(不失一般性，假定 $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$)：

定理 1　当 $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ 为无平方因子数时，我们有恒等式

$$\prod_{d \mid n} S(d) = p_1 \cdot p_2^2 \cdot \cdots \cdot p_{k-1}^{2^{k-2}} \cdot p_k^{2^{k-1}}$$

定理 2　当 $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ 为无平方因子数，以及 $n = p^k$ 为素数方幂时，我们有恒等式

$$\prod_{d \mid n} SL(d) = \begin{cases} p_1 \cdot p_2^2 \cdot \cdots \cdot p_{k-1}^{2^{k-2}} \cdot p_k^{2^{k-1}} & n = p_1 p_2 \cdots p_k \\ p^{\frac{k(k+1)}{2}} & n = p^k \end{cases}$$

定理 3　当 $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ 为无平方因子数，以及 $n = p^k$ 为素数方幂时，我们有恒等式

$$\prod_{d \mid n} \overline{SL}(d) = \begin{cases} p_1^{2^{k-1}} \cdot p_2^{2^{k-2}} \cdot p_3^{2^{k-3}} \cdot \cdots \cdot p_{k-1}^{2} \cdot p_k & n = p_1 p_2 \cdots p_k \\ p^{\frac{k(k+1)}{2}} & n = p^k \end{cases}$$

定理 4　当 $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ 为无平方因子奇数，以及 $n = 2p_1 p_2 \cdots p_k$ 为无平方因子偶数时，我们有恒等式

$$\prod_{d \mid n} Sdf(d) = \begin{cases} p_1 \cdot p_2^2 \cdot \cdots \cdot p_{k-1}^{2^{k-2}} \cdot p_k^{2^{k-1}} & n = p_1 p_2 \cdots p_k \\ 2^{2^k} \cdot p_1^2 \cdot p_2^{2^2} \cdot p_3^{2^3} \cdot \cdots \cdot p_k^{2^k} & n = 2p_1 p_2 \cdots p_k \end{cases}$$

---

① 收稿日期：2011-09-27

基金项目：国家自然科学基金资助项目(11071194).

作者简介：郇　乐(1987-)，女，陕西榆林人，硕士研究生，主要从事数论的研究.

定理5 当 $n=p_1p_2\cdots p_k$ 为无平方因子数，以及 $n=p^k$ 为素数方幂时，我们有恒等式

$$\prod_{d\mid n} Zw(d)=\begin{cases}(p_1p_2\cdots p_{k-1}p_k)^{2^{k-1}} & n=p_1p_2\cdots p_k \\ p^k & n=p^k\end{cases}$$

对于一般的正整数 $n>1$，是否有类似的结论也是一个公开的问题，有待于我们进一步研究.

1 几个引理

为完成定理的证明，我们需要下面几个引理：

引理1[2] 对任意正整数 n，有 $S(n)=\max\{S(p_1^{\alpha_1}),S(p_2^{\alpha_2}),\cdots,S(p_k^{\alpha_k})\}$，其中 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式.

引理2[3] 对任意给定的正整数 n，有 $SL(n)=\max\{p_1^{\alpha_1},p_2^{\alpha_2},\cdots,p_k^{\alpha_k}\}$，其中 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式.

引理3 当 n 为无平方因子偶数时，有 $Sdf(n)=2\cdot\max\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$；当 n 为无平方因子奇数时，有 $Sdf(n)=\max\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$. 其中 $p_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为互不相同的奇素因子.

证 当 n 为无平方因子偶数时，不失一般性，设 $n=2p_1p_2\cdots p_k$，其中 $p_1<p_2<\cdots<p_k$，如果 $Sdf(n)=2m$，那么 $2m$ 是满足 $n\mid 2\cdot4\cdot6\cdot(2m)$ 的最小正整数，所以 $m=p_k$. 事实上，对于 $2m=2\cdot p_k$，有

$$2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2\cdot p_k)=2^k(p_k)! \qquad k\in\mathbf{N}$$

所以 $n\mid(2m)!!$.

当 n 为无平方因子奇数时，不失一般性，设 $n=p_1p_2\cdots p_k$，其中 $p_1<p_2<\cdots<p_k$，$Sdf(n)=m$. 显然有 $n\mid 1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot p_k$，所以 $m=p_k$.

引理4[4] 对于任意正整数 n，如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 n 的标准分解式，那么 $Zw(n)=p_1p_2\cdots p_k$，因此 $Zw(n)$ 为 n 的可乘函数.

2 定理的证明

定理1的证明

当 $n=p_1p_2\cdots p_k$ 为无平方因子数时，不失一般性，假定 $p_1<p_2<\cdots<p_k$，注意到 $d\mid p_1p_2\cdots p_{k-1}$ 时有 $S(dp_k)=p_k$，于是由引理1可得

$$\prod_{d\mid n}S(d)=\prod_{d\mid p_1p_2\cdots p_{k-1}}S(d)\prod_{d\mid p_1p_2\cdots p_{k-1}}S(dp_k)=$$
$$\prod_{d\mid p_1p_2\cdots p_{k-2}}S(d)\prod_{d\mid p_1p_2\cdots p_{k-2}}S(dp_{k-1})\prod_{d\mid p_1p_2\cdots p_{k-1}}S(dp_k)=\cdots=$$
$$\prod_{d\mid p_1}S(d)\prod_{d\mid p_1}S(dp_2)\prod_{d\mid p_1p_2}S(dp_3)\cdots\prod_{d\mid p_1p_2\cdots p_{k-2}}S(dp_{k-1})\prod_{d\mid p_1p_2\cdots p_{k-1}}S(dp_k)=$$
$$p_1\cdot p_2^{d(p_1)}\cdot p_3^{d(p_1p_2)}\cdot\cdots\cdot p_{k-1}^{d(p_1p_2\cdots p_{k-2})}\cdot p_k^{d(p_1p_2\cdots p_{k-1})}=$$
$$p_1\cdot p_2^{2}\cdot\cdots\cdot p_{k-1}^{2^{k-2}}\cdot p_k^{2^{k-1}}$$

其中 $d(n)$ 为 Dirichlet 除数函数.

定理2的证明

当 $n=p_1p_2\cdots p_k$ 为无平方因子数时，利用定理1的证明方法及引理2可得

$$\prod_{d\mid n}SL(d)=\prod_{d\mid p_1p_2\cdots p_{k-1}}SL(d)\prod_{d\mid p_1p_2\cdots p_{k-1}}SL(dp_k)=$$
$$\prod_{d\mid p_1p_2\cdots p_{k-2}}SL(d)\prod_{d\mid p_1p_2\cdots p_{k-2}}SL(dp_{k-1})\prod_{d\mid p_1p_2\cdots p_{k-1}}SL(dp_k)=\cdots=$$
$$\prod_{d\mid p_1}SL(d)\prod_{d\mid p_1}SL(dp_2)\prod_{d\mid p_1p_2}SL(dp_3)\cdots\prod_{d\mid p_1p_2\cdots p_{k-1}}SL(dp_k)=$$

$$p_1 \cdot p_2^{d(p_1)} \cdot p_3^{d(p_1 p_2)} \cdot \cdots \cdot p_{k-1}^{d(p_1 p_2 \cdots p_{k-2})} \cdot p_k^{d(p_1 p_2 \cdots p_{k-1})} =$$

$$p_1 \cdot p_2^2 \cdot \cdots \cdot p_{k-1}^{2^{k-2}} \cdot p_k^{2^{k-1}}$$

当 $n = p^k$ 为素数方幂时，

$$\prod_{d \mid n} SL(d) = SL(p) SL(p^2) SL(p^3) \cdots SL(p^k) = p \cdot p^2 \cdot p^3 \cdot \cdots \cdot p^k = p^{\frac{k(k+1)}{2}}$$

定理 3 的证明

当 $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ 为无平方因子数时，利用定义可得

$$\prod_{d \mid n} \overline{SL}(d) = \prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} \overline{SL}(d) \prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} \overline{SL}(d p_k) =$$

$$\prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-2}} \overline{SL}(d) \prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-2}} \overline{SL}(d p_{k-1}) \prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} SL(d p_k) = \cdots =$$

$$\prod_{d \mid p_1} \overline{SL}(d) \prod_{d \mid p_1} \overline{SL}(d p_2) \prod_{d \mid p_1 p_2} \overline{SL}(d p_3) \cdots \prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} \overline{SL}(d p_k) =$$

$$p_1 \cdot (p_1 p_2) \cdot (p_1^2 p_2 p_3) \cdot (p_1^4 p_2^2 p_3 p_4) \cdot (p_1^8 p_2^4 p_3^2 p_4 p_5) \cdot \cdots \cdot$$

$$(p_k\, p_{k-1} p_{k-2}^2 p_{k-3}^{2^2} p_{k-4}^{2^3} \cdots p_1^{2^{k-2}}) = p_1^{2^{k-1}} p_2^{2^{k-2}} p_3^{2^{k-3}} \cdots p_{k-1}^2 p_k$$

当 $n = p^k$ 为素数方幂时，

$$\prod_{d \mid n} \overline{SL}(d) = \overline{SL}(1) \overline{SL}(p) \overline{SL}(p^2) \overline{SL}(p^3) \cdots \overline{SL}(p^k) = p \cdot p^2 \cdot p^3 \cdot \cdots \cdot p^k = p^{\frac{k(k+1)}{2}}$$

定理 4 的证明

当 $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ 为无平方因子奇数时，利用定理 1 的证明方法及引理 3 可得

$$\prod_{d \mid n} Sdf(d) = \prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} Sdf(d) \prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} Sdf(d p_k) =$$

$$\prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-2}} Sdf(d) \prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-2}} Sdf(d p_{k-1}) \prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} Sdf(d p_k) = \cdots =$$

$$\prod_{d \mid p_1} Sdf(d) \prod_{d \mid p_1} Sdf(d p_2) \prod_{d \mid p_1 p_2} Sdf(d p_3) \cdots \prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} Sdf(d p_k) =$$

$$p_1 \cdot p_2^{d(p_1)} \cdot p_3^{d(p_1 p_2)} \cdot \cdots \cdot p_{k-1}^{d(p_1 p_2 \cdots p_{k-2})} \cdot p_k^{d(p_1 p_2 \cdots p_{k-1})} =$$

$$p_1 \cdot p_2^2 \cdot \cdots \cdot p_{k-1}^{2^{k-2}} \cdot p_k^{2^{k-1}}$$

当 $n = 2 p_1 p_2 \cdots p_k$ 为无平方因子偶数时，利用定理 1 的证明方法及引理 3 可得

$$\prod_{d \mid n} Sdf(d) = \prod_{d \mid 2 p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} Sdf(d) \prod_{d \mid 2 p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} Sdf(d p_k) =$$

$$\prod_{d \mid 2 p_1 p_2 \cdots p_{k-2}} Sdf(d) \prod_{d \mid 2 p_1 p_2 \cdots p_{k-2}} Sdf(d p_{k-1}) \prod_{d \mid 2 p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} Sdf(d p_k) = \cdots =$$

$$\prod_{d \mid 2 p_1} Sdf(d) \prod_{d \mid 2 p_1} Sdf(d p_2) \prod_{d \mid 2 p_1 p_2} Sdf(d p_3) \cdots \prod_{d \mid 2 p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} Sdf(d p_k) =$$

$$(2^2 p_1^2) \cdot (2^2 p_2^4) \cdot (2^4 p_3^8) \cdot (2^8 p_4^{16}) \cdot \cdots \cdot (2^{2^{k-1}} p_k^{2^k}) =$$

$$2^{2^k} \cdot p_1^2 \cdot p_2^{2^2} \cdot p_3^{2^3} \cdot p_4^{2^4} \cdot \cdots \cdot p_k^{2^k}$$

定理 5 的证明

当 $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ 为无平方因子数时，利用定理 1 的证明方法及引理 4，并注意到 $Zw(n)$ 的可乘性，得

$$\prod_{d \mid n} Zw(d) = \prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} Zw(d) \prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} Zw(d p_k) =$$

$$\prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-2}} Zw(d) \prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-2}} Zw(d p_{k-1}) \prod_{d \mid p_1 p_2 \cdots p_{k-1}} Zw(d p_k) = \cdots =$$

$$\prod_{d|p_1} Zw(d) \prod_{d|p_1} Zw(dp_2) \prod_{d|p_1p_2} Zw(dp_3) \cdots \prod_{d|p_1p_2\cdots p_{k-1}} Zw(dp_k) =$$

$$p_1 \cdot (p_1 p_2^2) \cdot (p_1^2 p_2^2 p_3^4) \cdot \cdots \cdot (p_1^{2^{k-2}} \cdots p_{k-1}^{2^{k-2}} p_k^{2^{k-1}}) =$$

$$(p_1 p_2 \cdots p_{k-1} p_k)^{2^{k-1}}$$

当 $n = p^k$ 为素数方幂时,

$$\prod_{d|n} Zw(d) = Zw(1)Zw(p)Zw(p^2)Zw(p^3)\cdots Zw(p^k) = p \cdot p \cdot \cdots \cdot p = p^k$$

参考文献:

[1] SMARANDACHE F. Only Problem, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993: 17-60.

[2] CHARLES A. An Introduction to the Smarandache Function [M]. Vail: Erhus University Press, 1955: 8-9.

[3] MURTHY A. Some Notions on Least Common Multiples [J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12(1-3): 307-309.

[4] FELICE R. A Set of New Smarandache Functions, Sequences and Conjectures in Number Theory [M]. USA: American Research Press, 2000: 25-27.

On the Properties of Smarandache Function and Its Related Functions

HUAN Le

School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China

Abstract: Using the elementary method, the computational problem of the arithmetic product of Smarandache function and some related functions $SL(n)$, $\overline{SL}(n)$ and $Sdf(n)$, $Zw(n)$ is studied, and several accurate computational formulae in some especial cases are given.

Key words: Smarandache function; Smarandache LCM function ; SL dual function; Smarandache double factorial function; pseudo-Smarandache square-free function; arithmetic product

责任编辑 廖 坤